

CÁLCULO - TEMA 1 (vol. V)

PROPIEDADES CONTINUIDAD : Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en a . Entonces:

• $f \pm g$ cont. en a

• $f \cdot g$ cont. en a

→ • si $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ cont. en a

• si $f(a) > 0 \Rightarrow f^g$ cont. en a

COMPOSICIÓN → si f cont. en a y g cont. en $f(a) \Rightarrow g \circ f$ es cont. en a

(M1) Continuidad de $f(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+4}\right)$ $g(x) = \cos x$ $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$

$x-1$ cont ✓

x^2+4 cont ✓

$x^2+4 \neq 0$ ✓

$\frac{x-1}{x^2+4}$ cont.

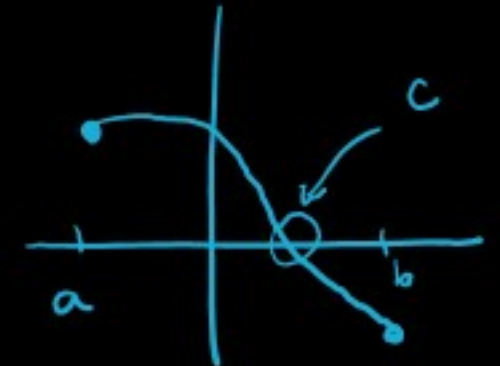
$\cos x$ cont siempre

$\Rightarrow$ composición de continuas

TEOREMAS DE CONTINUIDAD

!!!

f continua en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si es continua en todos los puntos de A



1. TEOREMA DE BOLZANO

si f es continua en $[a, b]$ tal que $\underline{f(a) \cdot f(b)} \leq 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(M1) ej. Sean f, g cont en $[a, b]$,, $\underset{*_1}{f(a) < g(a)}$ $\underset{*_2}{f(b) > g(b)}$. Demostrar $\exists$ corte $\underbrace{f \cap g}_{f = g}$

$$h(x) = f - g \stackrel{?}{=} 0$$

$\rightarrow [h(x) = f(x) - g(x)]$ cont. (resta cont.)

$$f - g = 0$$

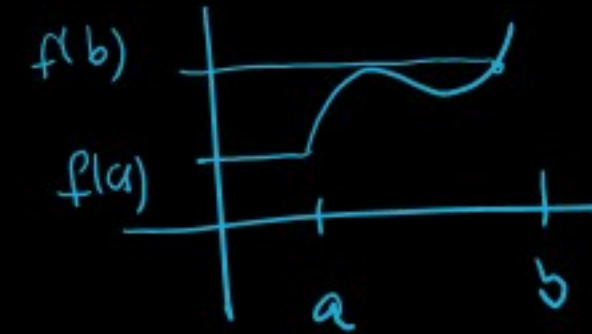
$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \quad (*_1)$$

$$h(b) = f(b) - g(b) > 0 \quad (*_2)$$

} Bolzano $\exists c \in (a, b)$,, $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$
($\exists$ corte)

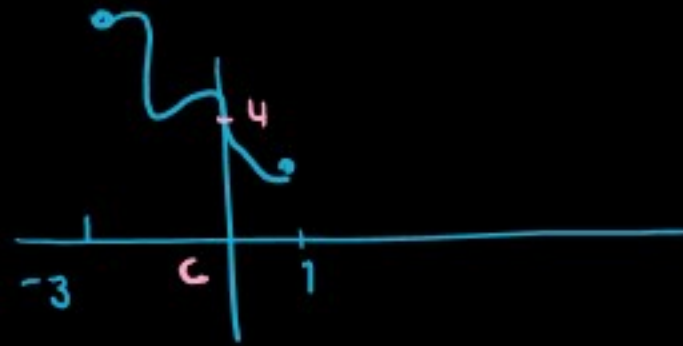
2. TEOREMA DE DARBOUX (VALORES INTERMEDIOS)

Si f es función continua en $[a, b] \Rightarrow f$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.



(M2) Sea f cont en $[-3, 1]$, $f(-3) = 6$ $f(1) = 2$.

Demostrar $\exists c \in (-3, 1)$, $f(c) = 4$



$4 \in (2, 6) \Rightarrow$ Darboux tiene que tomar 4 para algún $c \in (-3, 1)$

3. TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si f es continua en $[a, b]$ entonces f alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$,

es decir, $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tq:

$$f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x) \geq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$$

(M3) ¿Tiene $f(x)$ máx y mín absoluto en $[0, 1]$?

$f(x)$ cont?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(1+x^2)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acot.}} \cdot x = 0 = f(0) \quad \underline{\underline{f(x) \text{ cont}}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(1+x^2)}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \underline{\underline{x=0}} \end{cases}$$

log(>0) :)

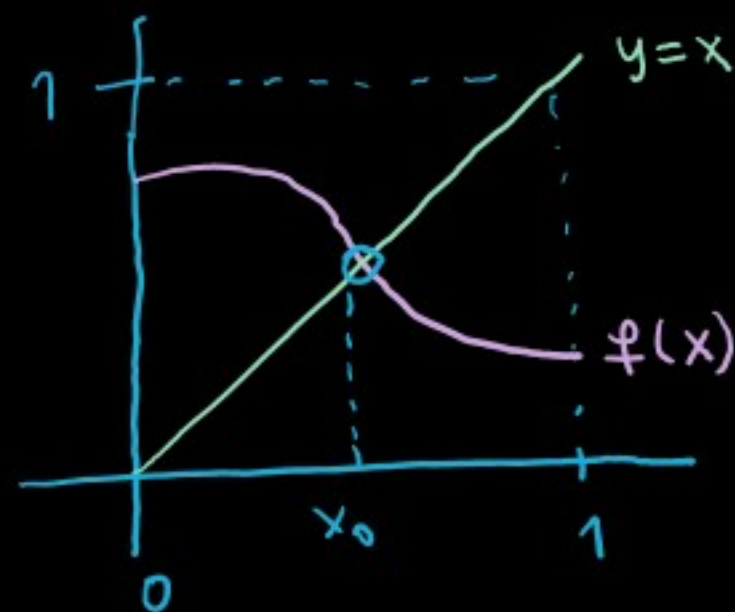
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(en $[0, 1]$) :)

$\Rightarrow$ Weierstrass

$\exists$ máx y mín abs. en $[0, 1]$

(E1) sea $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua,, $\underbrace{0 < f(x) < 1}_{*1} \quad \forall x \in [0,1] \quad *2$

Demstrar $\exists x_0 \in (0,1)$ tq $f(x_0) = x_0$



$$\hookrightarrow y=x$$

$$\exists \text{ intersección } \begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = f(x) \end{cases}$$

$$x = f(x) \Rightarrow f(x) - x = 0$$

$$h(x) = f(x) - x \quad (\text{cont. resta de cont en } [0,1])$$

$$h(0) = f(0) - 0 > 0 \quad *1$$

$$h(1) = f(1) - 1 < 0 \quad *2$$

$$\left. \begin{matrix} h(0) > 0 \\ h(1) < 0 \end{matrix} \right\} \text{Th. Bolzano} \Rightarrow \exists x_0 \in (0,1),$$

$$h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0 \quad \checkmark$$