

CÁLCULO - TEMA 1 (vol IV)

INFINITOS

Una función $f(x)$ es un infinito en $x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}$ es un infinitésimo en x_0

• Infinitos equivalentes:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

• Infinito principal equivalente: En $x_0 = \infty$: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \approx a_n x^n$

$$\text{ej: } 3x^3 + 2x^2 + \dots \approx 3x^3$$

INFINITOS MÁS SIGNIFICATIVOS:

$$(\log_b x)^m \ll x^p \ll a^x \ll x^{k \cdot x}$$

$$(b > 1, m > 0)$$

$$(p > 0)$$

$$(a > 1)$$

$$(k > 0)$$

$$\textcircled{M1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\log \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}\right]} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \log \left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-\log x}{x}} = e^0 = 1$$

$\log(x^{-1}) = -\log x$

$\log x \ll x$

$$\textcircled{M2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)}{\log \left(1 + \frac{x+3}{x^2+7}\right)} = \frac{0}{0} \quad \checkmark \text{ infinitesimal eq.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x^2+3}}{\frac{x+3}{x^2+7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) \cdot (x^2+7)}{(x+3)(x^2+3)} =$$

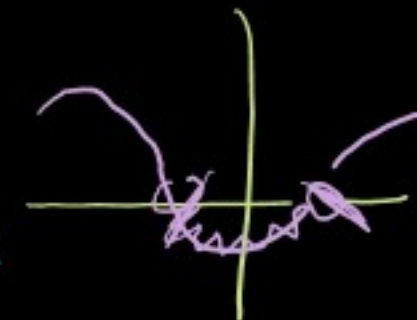
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x + x^2 + 7}{x^3 + 3x + 3x^2 + 9} = 1$$

E1 Dominio, asíntotas y dibujo aproximado de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

$$x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$\nexists$ sol $\Rightarrow \nexists$ corta eje x



ej $f(1) = \sqrt{3} > 0$
(siempre > 0)

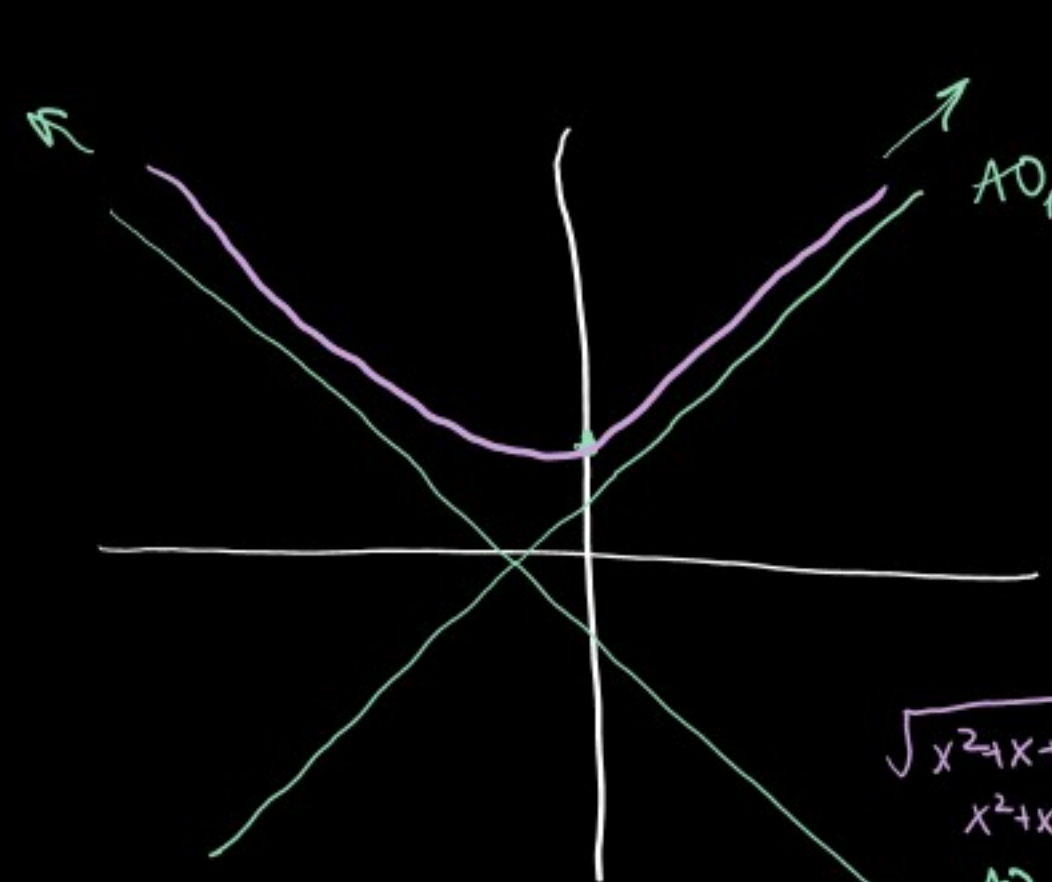
$$\boxed{D = \mathbb{R}}$$

• $\nexists$ A.V.

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = \infty \quad \nexists$ A.H.

AO₁ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \left[1 = m_1 \right]$

AO₂ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \left[-1 = m_2 \right]$



$$f(0) = 1$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + \frac{1}{2}$$

$$x^2 + x + 1 \neq x^2 + x + \frac{1}{4}$$

AO₂

¿corta con asíntotas?

$f(x) = AO_1 \quad \nexists$ sol.

$f(x) = AO_2 \quad \nexists$ sol.

AO₁ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \left[\frac{1}{2} = n_1 \right]$

AO₂ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \left[n_2 = -\frac{1}{2} \right]$

$$\left[AO_1: y = 1x + \frac{1}{2} \right] \quad \left[AO_2: y = -x - \frac{1}{2} \right]$$

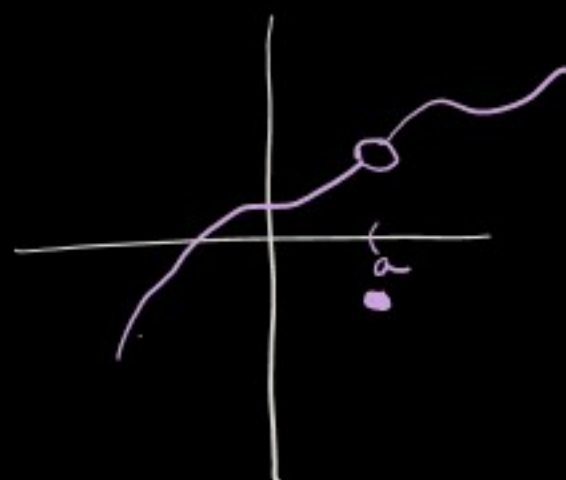
CONTINUIDAD.

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua } \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in D \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{array} \right. \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

($\nexists$ discontinua ni no es cont.)

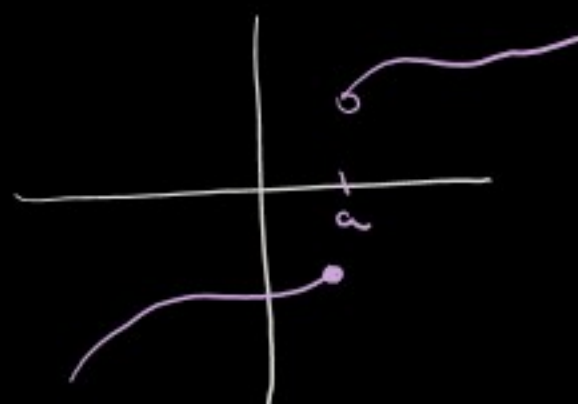
TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Disc. evitable



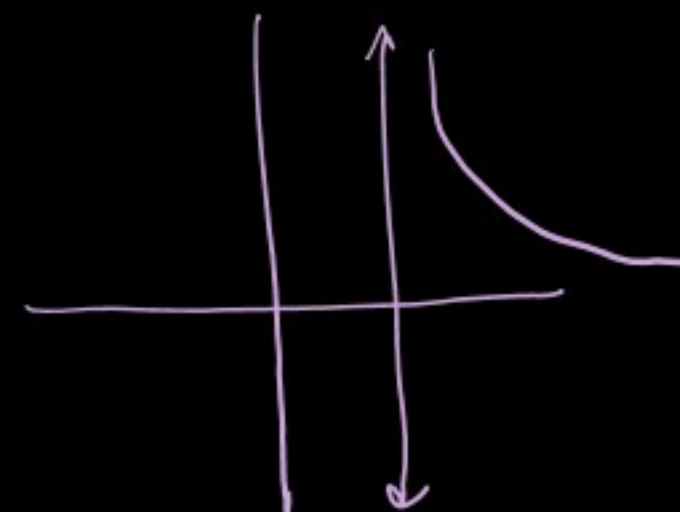
$$\begin{aligned} &\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &(\nexists f(a)) \\ &(\neq f(a)) \end{aligned}$$

Disc. salto (1ª especie)



$$\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Disc. esencial (2ª esp.)



$\nexists$ algún lim. lateral

M3

Estudiar la continuidad de

de

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \text{ cont. en } x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2-1) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2-1) = -1$$

disc. salto

P1

Continuidad de

de

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

da problemas en $x=0$ ($\nexists$ dom.)

si $x=0 \leftarrow$ miraría aquí $x=0$ ($f(0)=1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} \right) = \frac{1+0}{1-0} = 1 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} \right) = \frac{+\infty}{-\infty} = -1 \quad (\text{infinitos iguales})$$

$$e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$$

$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Disc. salto

