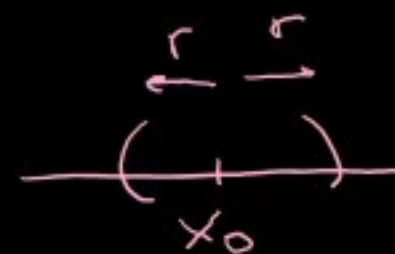
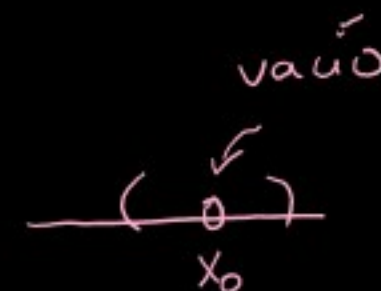


CÁLCULO TEMA 1 (VOL. II)

• Entorno de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$: $I = (x_0 - r, x_0 + r)$



• Entorno reducido (perforado) de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$: $I = (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}$



Función acotada:

$f(x)$ acotada en un cjo A si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| < M \quad \forall x \in A$

TEOREMA

Sean f, g funciones tq:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

2. f acotada en un entorno reducido de x_0

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0}$$

ej: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\leftarrow g(x) \cdot f(x) \\ \in [-1,1]}} = 0$

INFINITÉSIMOS

Una función $f(x)$ es un infinitésimo en x_0 si $\left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \right]$

Infinitésimos estándar:

- $f(x) = A \cdot (x - x_0)^p$, $p > 0$ en $x_0 \neq \infty$

- $f(x) = \frac{A}{x^p}$, $p > 0$ en $x_0 \neq 0$

Comparar infinitésimos:

- f es de orden MAYOR que g si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- f y g son del mismo ORDEN si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ($A \neq 0$, $A \neq \pm \infty$)

ej: $f(x) = (x-1)^3$ $g(x) = 7(x-1)^2$ en $\underline{x_0 = 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)} = \infty$$

NOTA: comparando $A(x-x_0)^p$ y $B(x-x_0)^q \rightarrow$ si $p > q > 0$: $A(x-x_0)^p$ es de orden mayor

$$\frac{A}{x^p} \text{ orden mayor que } \frac{B}{x^q} \text{ si } p > q > 0$$

$$(A, B \neq 0)$$

Orden y parte principal de un infinitésimo:

(1) si $x_0 \neq \infty$

f es de orden p si $\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^p} = A \right] \neq 0, \pm \infty$

su parte principal $\left[PP(f) = A \cdot (x-x_0)^p \right]$

(2) si $x_0 = \infty$

f es de orden p si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1/x^p} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot x^p = A \right] \neq 0, \pm \infty$

$\left[PP(f) = \frac{A}{x^p} \right]$

NOTA: si $f(x) = A \cdot (x-x_0)^p \Rightarrow \begin{cases} \text{orden}(f) = p \\ PP(f) = A \cdot (x-x_0)^p \end{cases}$

si $f(x) = \frac{A}{x^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{orden}(f) = p \\ PP(f) = \frac{A}{x^p} \end{cases}$

INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES

• Dos infinitésimos f y g en x_0 son equivalentes $\Leftrightarrow \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right]$

PROPIEDADES:

1. Si f y g infinitésimos equiv. en $x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{orden}(f) = \text{orden}(g) \\ PP(f) = PP(g) \end{cases}$

2. Si $f \approx g \Rightarrow [fh \approx gh] \quad \left[\frac{fh}{k} \approx \frac{gh}{k} \right] \quad \left[\frac{h}{fk} \approx \frac{h}{gk} \right]$

3. Si $f \approx g \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot h(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot h(x)) \right] \quad \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)h(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)h(x)}{k(x)} \right] \quad \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)k(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)k(x)} \right]$

4. Si f y g son infinitésimos en x_0 y $\text{orden}(f) > \text{orden}(g) \Rightarrow \underline{f+g \approx g}$

PRINCIPALES INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$\bullet \text{ sen } f(x) \approx f(x)$$

$$\bullet \text{ arcsen } f(x) \approx f(x)$$

$$\bullet 1 - \cos f(x) \approx \frac{[f(x)]^2}{2}$$

$$\bullet \text{ tg}(f(x)) \approx f(x)$$

$$\bullet \text{ arctg}(f(x)) \approx f(x)$$

$$\bullet \text{ Log}(1 + f(x)) \approx f(x)$$

$$\bullet a^{f(x)} - 1 \approx f(x) \cdot \text{Log}(a) \quad a > 0$$

$$(\text{en particular: } e^{f(x)} - 1 \approx f(x))$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$$

$$\bullet \text{ Log } f(x) \approx f(x) - 1$$

$$\text{NOTA: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow f(x) \approx \ell$$