

▫ Minirepaso Gauss

▫ Otros casos de aplicación de la ley de Gauss

(P1) Placa plana ∞ , de espesor "d", cargada con ρ

(P2) Cilindro ∞ , de radio R, cargado con ρ

(P3) Esfera de radio R, cargada con σ

▫ Introducción al método de integración

(M4) Cálculo $\vec{E}$, hilo ∞

(P4) Cálculo $\vec{E}$, hilo semi- ∞

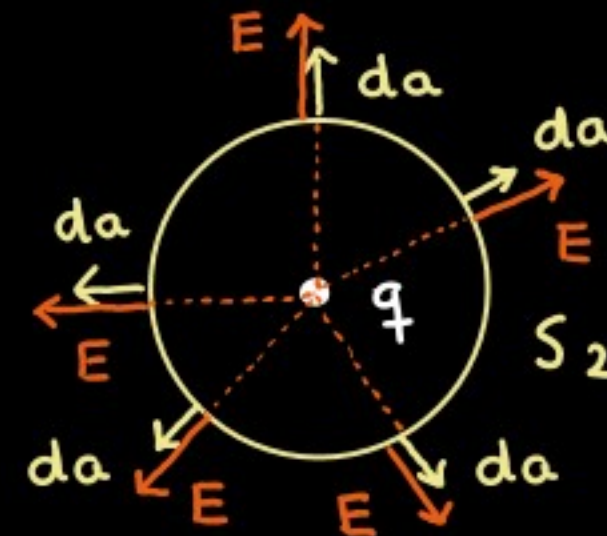
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightsquigarrow \text{OBJ} \rightsquigarrow EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

RETO: Escoger una superficie cerrada

Supongamos que queremos calcular el campo $\vec{E}$ generado por una carga puntual (q_0) :

¿Que Gaussiana escogemos?

↙ ↘
 S_1 S_2



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oiint E(da) \cdot da \cdot \underbrace{\cos(\theta(da))}_{=1 \text{ (OBJ 1)}} = \oiint \underbrace{E(da)}_{=E \text{ (OBJ 2)}} \cdot da = E \oiint da = EA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

↑
OBJ conseguido!

Reflexiones:

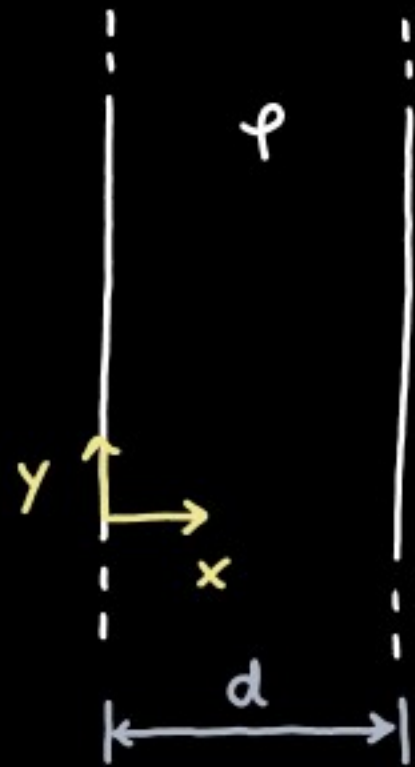
OBJ 1) Buscamos que θ (ángulo interior entre $\vec{E}$ y $d\vec{a}$) = $0^\circ \rightsquigarrow \cos \theta = 1$

OBJ 2) Buscamos que $|\vec{E}|$ sea del mismo valor en todo punto de la superficie

Recordar que Gauss nos devuelve $|\vec{E}|$: la dirección y sentido tienen que ser conocidas
Gauss devuelve el E_{total} en la región, no sólo el generado por q_{int}

(P1) Placa plana ∞ , de espesor "d", cargada con ρ

Vista 2D

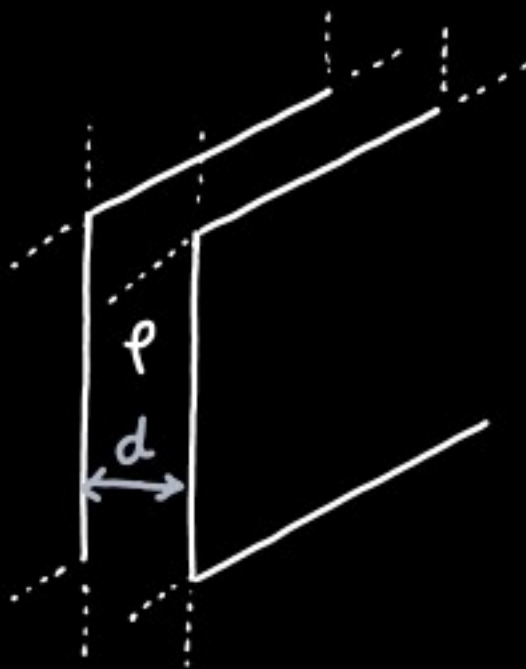


Datos: ρ, d, ϵ_0 Pide: Calcular $\vec{E}$ en todos los puntos

Recordatorio Estrategia: (sesión #1)

- #1) ¿Cuál será la forma de las líneas de $\vec{E}$?
- #2) ¿Qué tipo de Gaussiana se puede escoger para que $\vec{E} \parallel d\vec{a}$?
- #3) Operar la fórmula y despejar E
- #4) Añadir la dirección y sentido de $\vec{E}$ para dar el resultado final

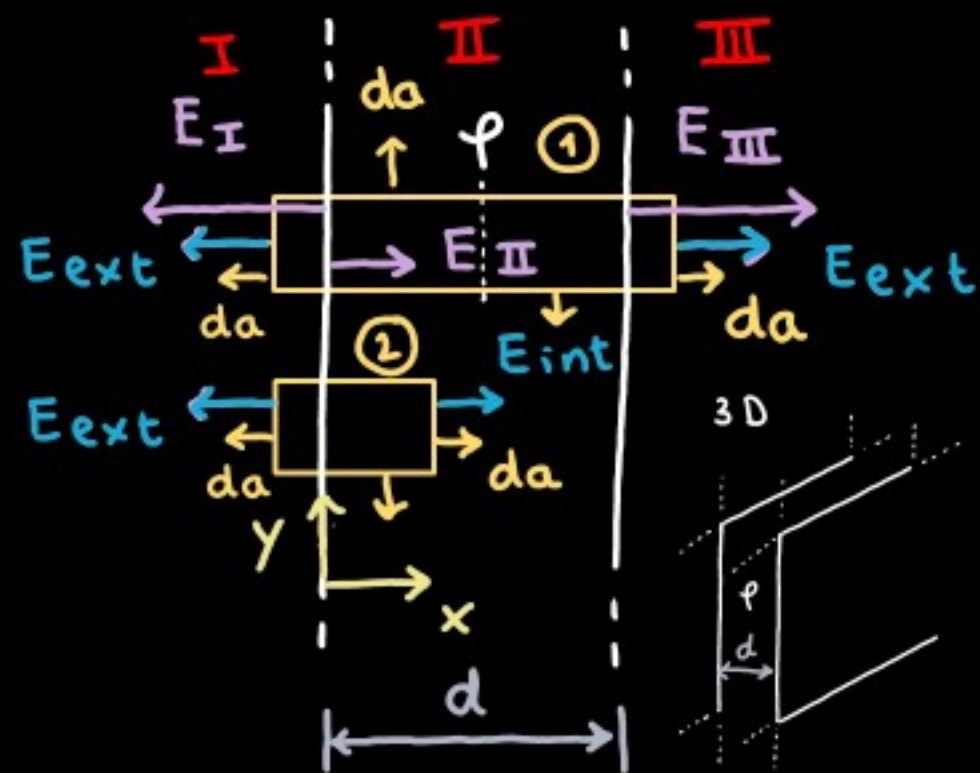
Vista 3D



Ⓟ Placa plana ∞ , de espesor "d", cargada con ρ

Datos: ρ, d, ϵ_0 Pide: Calcular $\vec{E}$ en todos los puntos

Vista 2D



Recordatorio Estrategia: (sesión #1)

#1) ¿Cuál será la forma de las líneas de $\vec{E}$?

#2) ¿Qué tipo de Gaussiana se puede escoger para que $\vec{E} \parallel d\vec{a}$?

#3) Operar la fórmula y despejar E

#4) Añadir la dirección y sentido de $\vec{E}$ para dar el resultado final

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Cilindro centrado en la placa} \\ \textcircled{2} \text{ Cilindro descentrado} \end{array} \right.$$

$$\vec{E}_{ext} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\epsilon_0} \hat{i} & \text{si } x > d \\ -\frac{\rho d}{2\epsilon_0} \hat{i} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

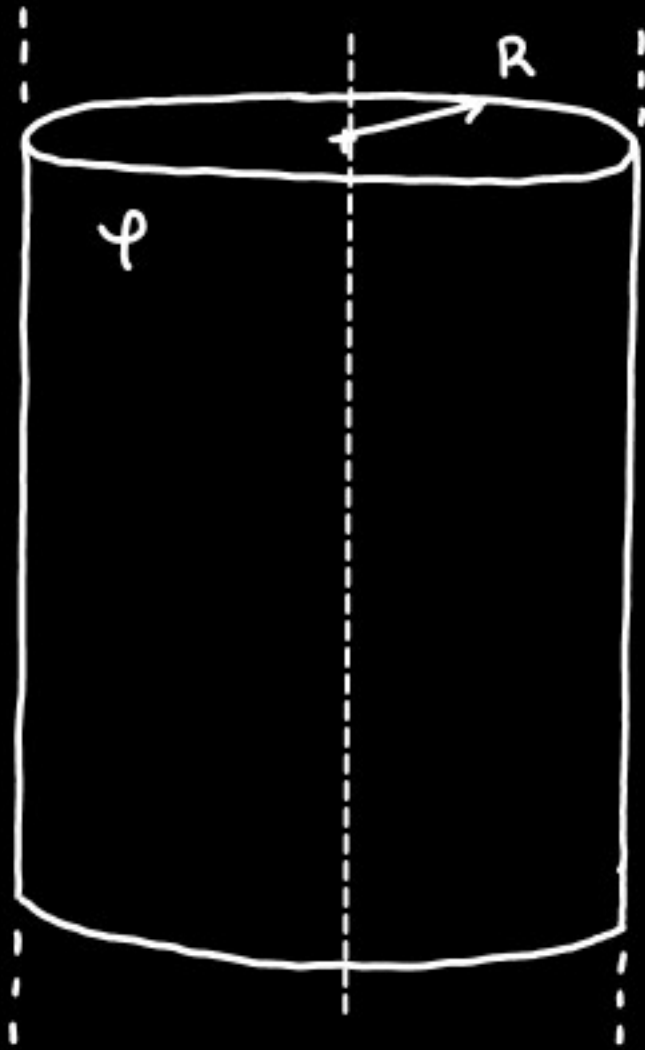
$$\textcircled{1} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iint_{\text{tapa tras}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{\text{tapa del.}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \cancel{\iint_{\text{tapa lat.}} \vec{E} \cdot d\vec{a}} = 2E_{ext} \cdot A = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot d \cdot A}{\epsilon_0} \rightarrow E_{ext} = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

$$\textcircled{2} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \iint_{\text{tapa tras}} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \iint_{\text{tapa del.}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \cancel{E_{ext} \cdot A} + \cancel{E_{int} \cdot A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho x A}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\rho d}{2\epsilon_0} + E_{int} = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E_{int} = \frac{\rho x}{\epsilon_0} - \frac{\rho d}{2\epsilon_0} = \frac{\rho (2x - d)}{2\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{int} = \frac{\rho (2x - d)}{2\epsilon_0} \hat{i} \quad x \in [0, d]$$

(P2) Cilindro ∞ , de radio R , cargado con ρ Datos: ρ, R, ϵ_0

Pide: Calcular $\vec{E}$ en todos los puntos

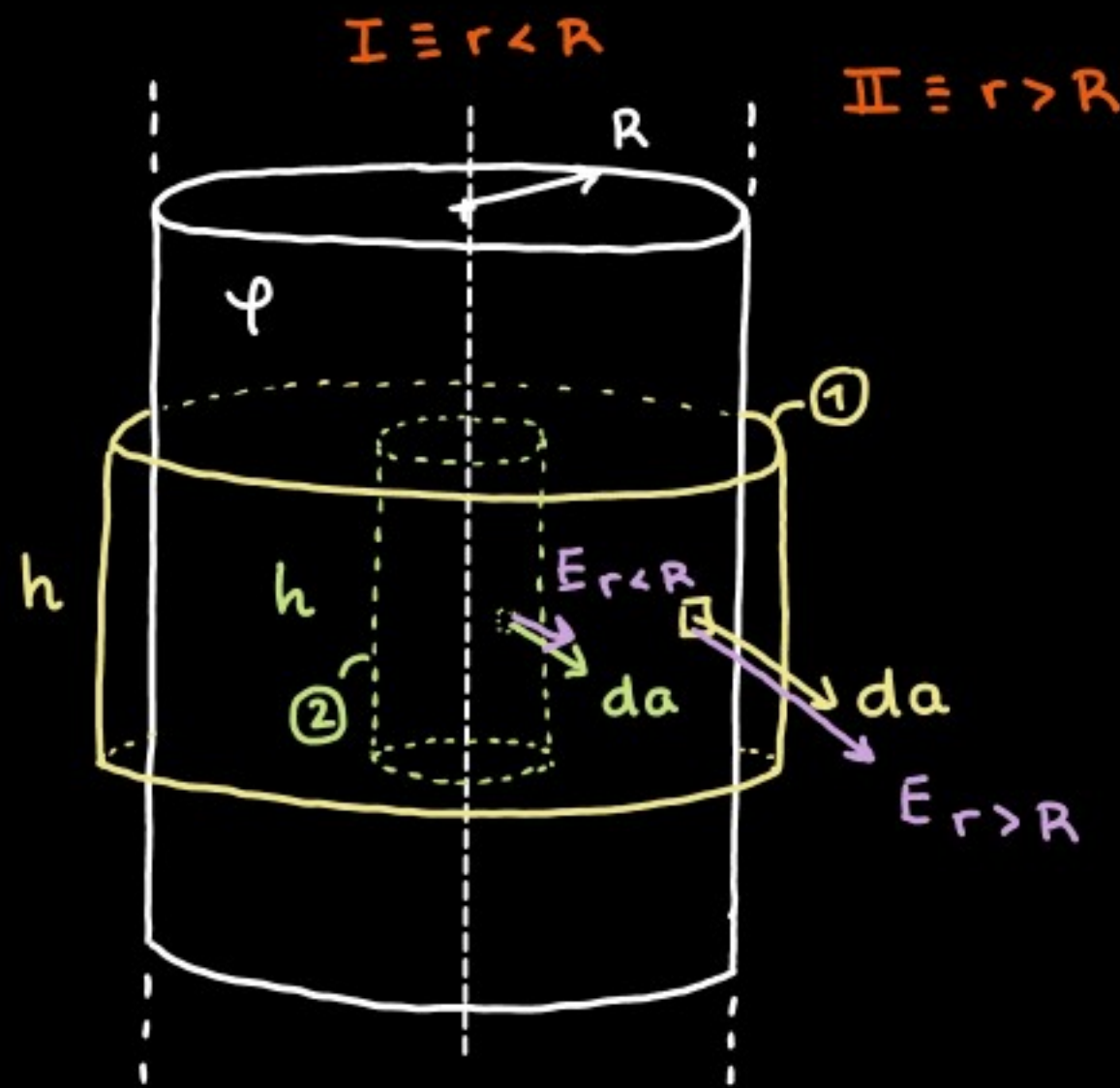


Recordatorio Estrategia: (sesión #1)

- #1) ¿Cuál será la forma de las líneas de $\vec{E}$?
- #2) ¿Qué tipo de Gaussiana se puede escoger para que $\vec{E} \parallel d\vec{a}$?
- #3) Operar la fórmula y despejar E
- #4) Añadir la dirección y sentido de $\vec{E}$ para dar el resultado final

P2 Cilindro ∞ , de radio R , cargado con φ Datos: φ, R, ϵ_0

Pide: Calcular $\vec{E}$ en todos los puntos



Recordatorio Estrategia: (sesión #1)

#1) ¿Cuál será la forma de las líneas de $\vec{E}$?

#2) ¿Qué tipo de Gaussiana se puede escoger para que $\vec{E} \parallel d\vec{a}$?

#3) Operar la fórmula y despejar E

#4) Añadir la dirección y sentido de $\vec{E}$ para dar el resultado final

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Cilindro coaxial } r > R \\ \textcircled{2} \text{ Cilindro coaxial } r < R \end{array} \right.$$

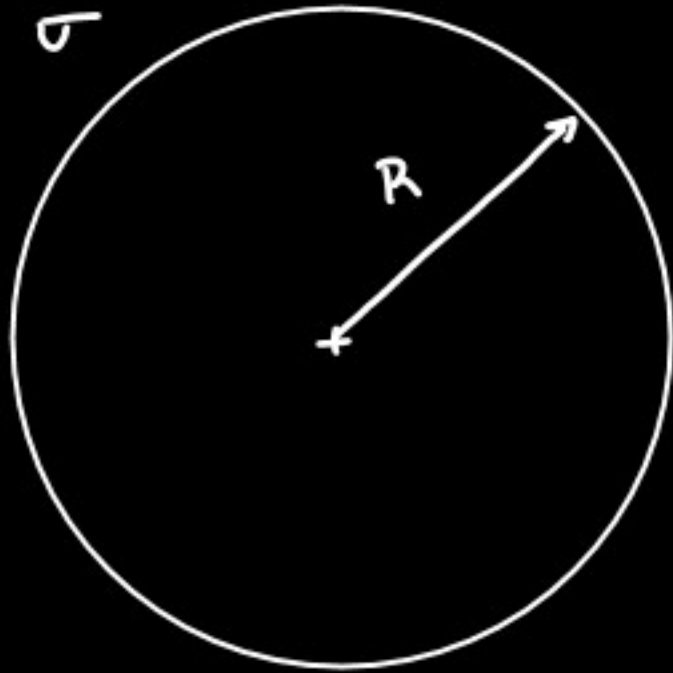
$$\textcircled{1} \oiint_{r > R} \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \cdot 2\pi r h = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\varphi \cdot \pi R^2 \cdot h}{\epsilon_0} \rightarrow E_{r > R} = \frac{\varphi R^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \rightarrow \boxed{E_{r > R} = \frac{\varphi R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}}$$

$$\textcircled{2} \oiint_{r < R} \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \cdot 2\pi r h = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\varphi \cdot \pi r^2 \cdot h}{\epsilon_0} \rightarrow E_{r < R} = \frac{\varphi}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \rightarrow \boxed{E_{r < R} = \frac{\varphi}{2\epsilon_0 r} \hat{r}}$$

(P3) Esfera de radio R , cargada con σ

Datos: σ, R, ϵ_0

Pide: Calcular $\vec{E}$ en todos los puntos



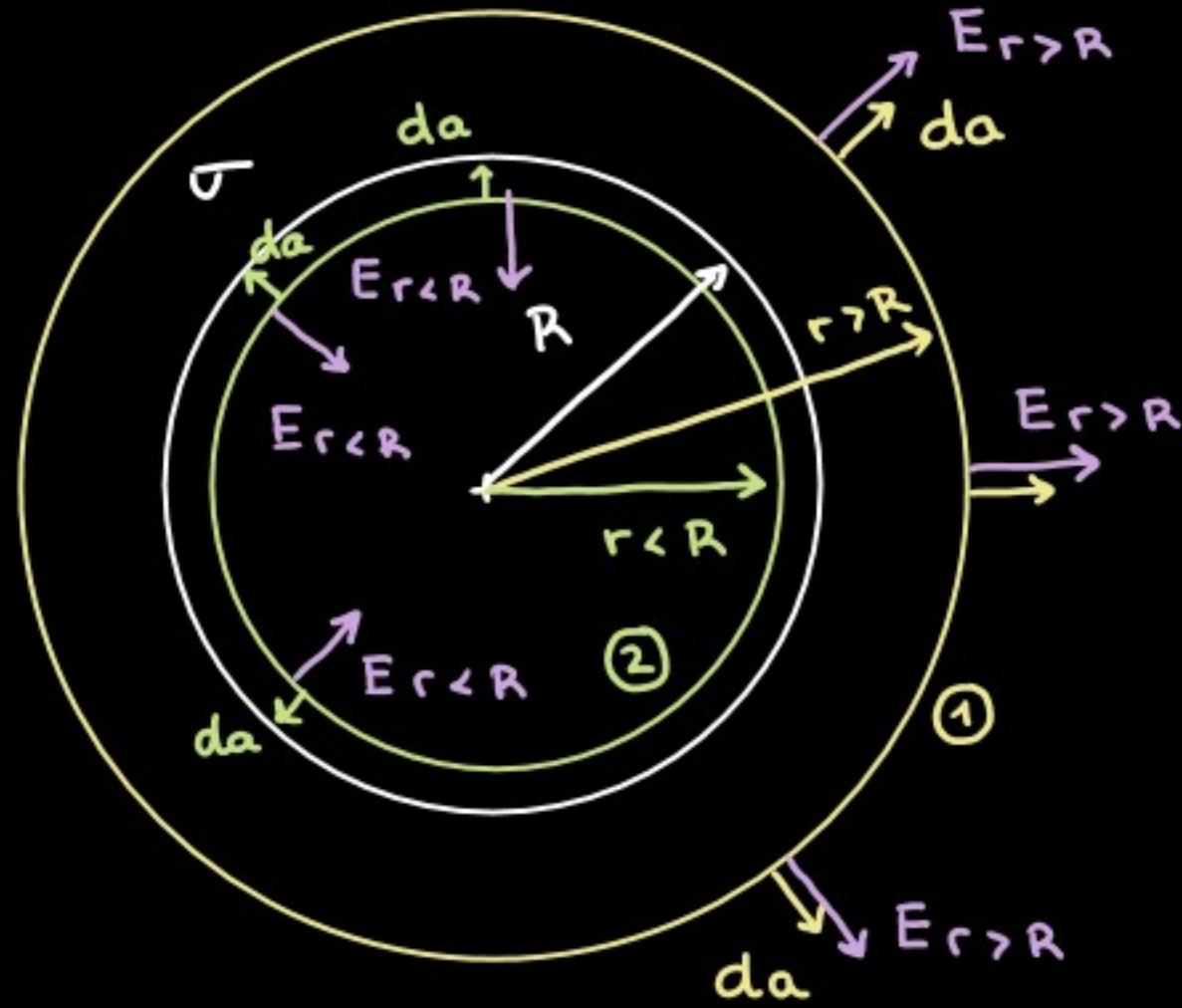
Recordatorio Estrategia: (sesión #1)

- #1) ¿Cuál será la forma de las líneas de $\vec{E}$?
- #2) ¿Qué tipo de Gaussiana se puede escoger para que $\vec{E} \parallel d\vec{a}$?
- #3) Operar la fórmula y despejar E
- #4) Añadir la dirección y sentido de $\vec{E}$ para dar el resultado final

(P3) Esfera de radio R , cargada con σ

Datos: σ, R, ϵ_0

Pide: Calcular $\vec{E}$ en todos los puntos



Recordatorio Estrategia: (sesión #1)

#1) ¿Cuál será la forma de las líneas de $\vec{E}$?

#2) ¿Qué tipo de Gaussiana se puede escoger para que $\vec{E} \parallel d\vec{a}$?

#3) Operar la fórmula y despejar E

#4) Añadir la dirección y sentido de $\vec{E}$ para dar el resultado final

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ Esfera concéntrica } r > R \\ \textcircled{2} \text{ Esfera concéntrica } r < R \end{array} \right.$$

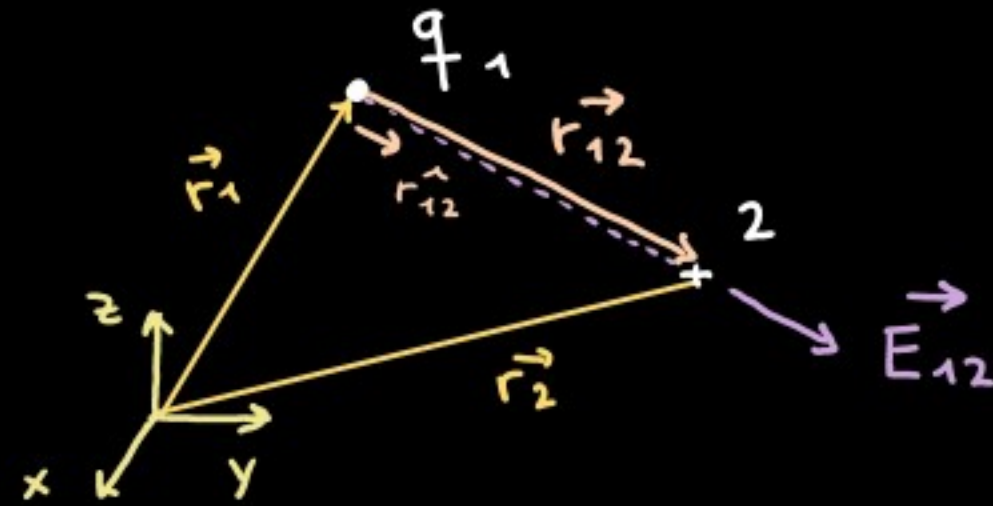
$$\textcircled{1} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_{r > R} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\epsilon_0} \rightarrow Q_{esf} \rightarrow \boxed{E_{r > R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{esf}}{r^2} \hat{r}}$$

$$\textcircled{2} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{a} = -E_{r < R} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \boxed{E_{r < R} = 0 \hat{r}}$$

Integración

- El cálculo de $\vec{E}$ por integración se emplea en configuraciones "sin simetría" (allá donde no pueda usarse Gauss $\leftrightarrow$ si no conocemos dir. + sent. de $\vec{E}$)
- El método se basa en sumar las contribuciones al campo $\vec{E}$ generadas por un conjunto de cargas muy pequeñitas (dq), que se modelan como cargas puntuales

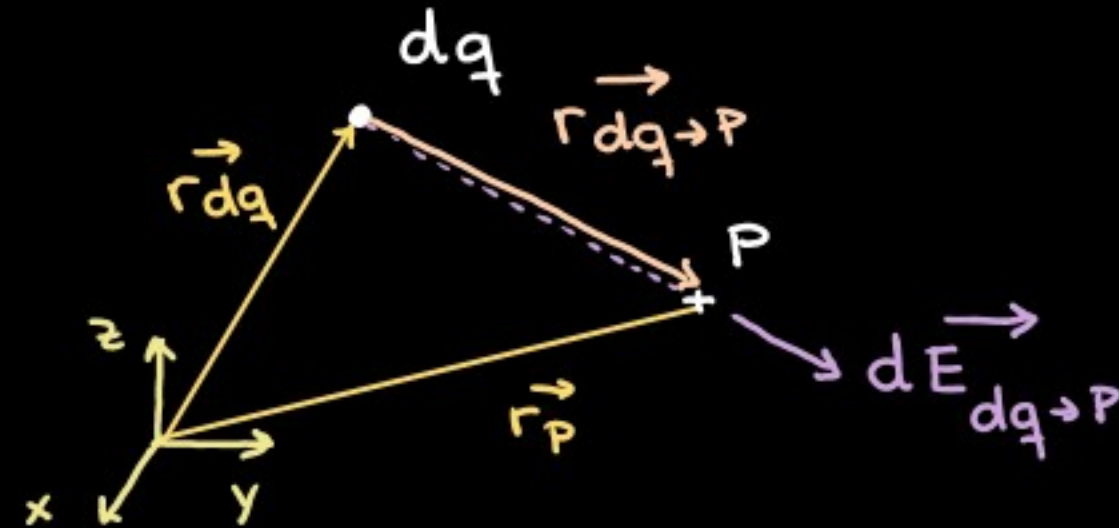
En SI:



$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\vec{r}_{12}|^3} \cdot \vec{r}_{12}$$

Nótese que $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

En integración:

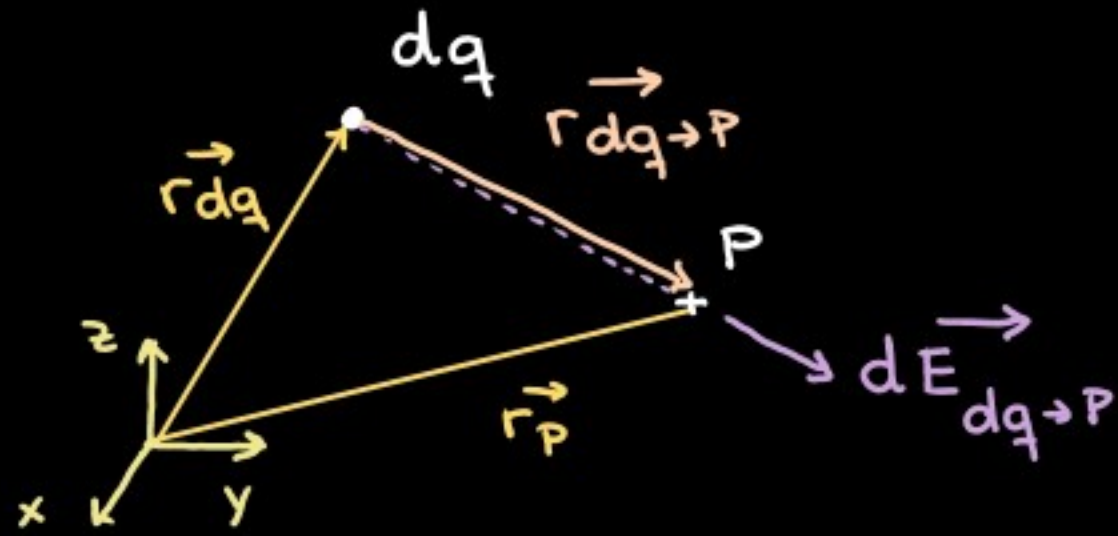


$$d\vec{E}_{dq \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}|^3} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_{dq})$$

El reto se encuentra (tan sólo) en definir matemáticamente:

$\rightarrow$ y lanzarse a integrar mediante tablas

- $dq \equiv$ cachito de carga (depende de la geometría)
- $\vec{r}_{dq} \equiv$ Posición del dq
- $\vec{r}_P \equiv$ Punto cálculo de $\vec{E}$



$$\vec{dE}_{dq \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}|^3} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_{dq})$$

Tablas de integración: (Os las dan en examen)

$$\cdot \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\cdot \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\cdot \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \text{Ln} \left(x + (x^2 + a^2)^{1/2} \right)$$

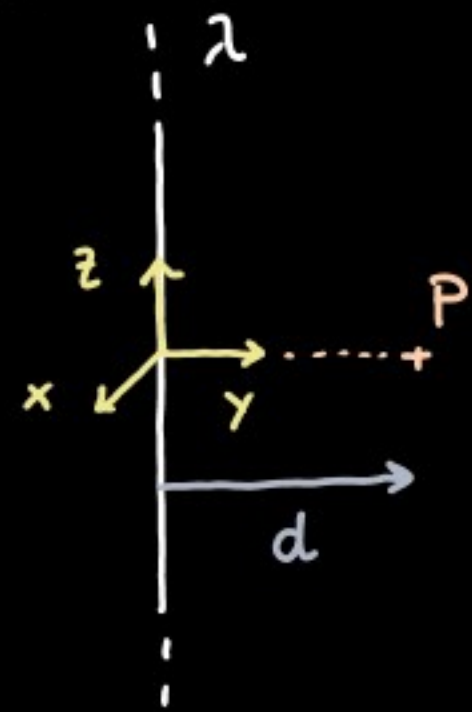
$$\cdot \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = (x^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\cdot \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\cdot \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \text{Ln}(ax + b)$$

$$\cdot \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \leftarrow \text{Esta no la dan! Hay que sabersela}$$

M4



Remember

$$[\lambda] = [C/m]$$

Datos Pide

λ, ϵ_0, d Calcular el Campo $\vec{E}_P$ generado por el hilo ∞

Pasos:

#1) Escribir $d\vec{E}_{dq \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}|^3} (\vec{r}_P - \vec{r}_{dq})$

#2) Pintar dq

#3) Definir $dq, \vec{r}_P, \vec{r}_{dq}$

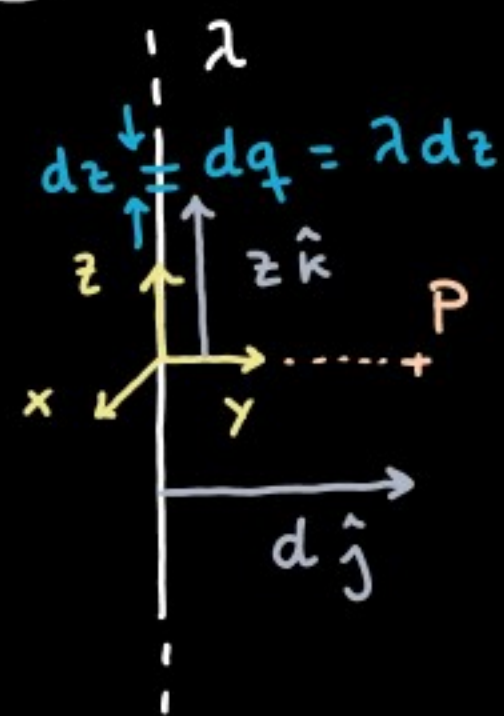
#4) Calcular cada término de $d\vec{E}$

#5) Sustituir en la expresión

#6) Establecer límites de integración de dq

#7) Integrar usando tablas

M4



$$[\lambda] = [C/m]$$

Datos Pide

λ, ϵ_0, d Calcular el Campo $\vec{E}_P$ generado por el hilo ∞

Pasos:

#1) Escribir $d\vec{E}_{dq \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}|^3} (\vec{r}_P - \vec{r}_{dq})$

#2) Pintar dq

#3) Definir $dq, \vec{r}_P, \vec{r}_{dq}$

#4) Calcular cada término de $d\vec{E}$

#5) Sustituir en la expresión

#6) Establecer límites de integración de dq

#7) Estudiar simetrías

#8) Integrar usando tablas

$$dq = \lambda dz$$

$$\vec{r}_P = d\hat{j} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{r}_{dq} = z\hat{k} \end{array} \right\} (\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}) = d\hat{j} - z\hat{k}$$

$$|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}| = (d^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\int d\vec{E}_{dq \rightarrow P} = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{(d^2 + z^2)^{3/2}} (d\hat{j} - z\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz \cdot d\hat{j}}{(d^2 + z^2)^{3/2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz \cdot z\hat{k}}{(d^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda d\hat{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(d^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda d\hat{j}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{d^2 (z^2 + d^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

0 (dada la sim.)

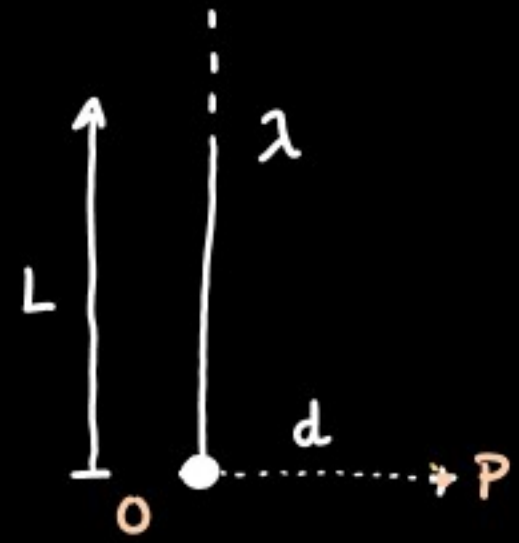
$$\vec{E}_P = E_P \hat{j}$$

$$\vec{E}_P = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{d^2} \hat{j} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \hat{j}$$

Comparar
con Gauss
($r=d$)

$$\frac{1}{d^2} - \frac{-1}{d^2} = \frac{2}{d^2}$$

(P₄) Hilo semi-infinito (va desde el origen hasta $+\infty$)



Datos

• $\lambda, L, d, \epsilon_0$

Pide

• Calcular $\vec{E}_P$

(P4) Hilo semi-infinito (va desde el origen hasta $+\infty$)



Datos

$\lambda, L, d, \epsilon_0$

Pide

Calcular $\vec{E}_P$

$$d\vec{E}_{dq \rightarrow P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}|^3} (\vec{r}_P - \vec{r}_{dq})$$

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}) = d\hat{j} - z\hat{k}$$

$$dq = \lambda dz; \vec{r}_P = d\hat{j}; \vec{r}_{dq} = z\hat{k}; |\vec{r}_P - \vec{r}_{dq}| = (z^2 + d^2)^{1/2}$$

$$d\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{(z^2 + d^2)^{3/2}} (d\hat{j} - z\hat{k})$$

$$\vec{E}_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[d\hat{j} \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{dz}{(z^2 + d^2)^{3/2}} - \hat{k} \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{z \cdot dz}{(z^2 + d^2)^{3/2}} \right]$$

$$\textcircled{1}: \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 (x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\textcircled{2}: \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\hookrightarrow \textcircled{1} \equiv \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{dz}{(z^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{z}{d^2 (z^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{d^2}$$

$$\hookrightarrow \textcircled{2} \equiv \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{z \cdot dz}{(z^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(z^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = 0 - \frac{-1}{d} = \frac{1}{d}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_P = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} (\hat{j} - \hat{k})}$$