

Tema 7: Límites y Continuidad en varias variables $\rightsquigarrow S1$

Tema 8: Derivadas parciales, derivadas direccionales y diferenciabilidad $\rightsquigarrow S2$

↳ Problemas en la web (idestacademy.com)

Prueba Corta (5%) [T7 y T8]

Tema 9: Funciones compuestas, implícitas e inversas

Tema 10: Extremos de funciones escalares

Inter (25%) [T7-T10]

Vamos a ir a
1 Tema al día

2024

Enero								Sem.
L	M	X	J	V	S	D		
1	2	3	4	5	6	7		
8	9	10	11	12	13	14		
15	16	17	18	19	20	21	1	
22	23	24	25	26	27	28	2	
29	30	31					3	

Febrero								Sem.
L	M	X	J	V	S	D		
			1	2	3	4		3
	5	6	7	8	9	10		4
	12	13	14	15	16	17		5
	19	20	21	22	23	24		6
	26	27	28	29				7

Marzo								Sem.
L	M	X	J	V	S	D		
				1	2	3		7
	4	5	6	7	8	9		8
	11	12	13	14	15	16		9
	18	19	20	21	22	23		10
	25	26	27	28	29	30		31

Abril								Sem.
L	M	X	J	V	S	D		
1	2	3	4	5	6	7		11
8	9	10	11	12	13	14		12
15	16	17	18	19	20	21		13
22	23	24	25	26	27	28		14
29	30							

Sesião 1: Introdução a Varias variables

Função: Es una "~~cosa~~" ^{Aplicación} a la que alimentas con unas entradas y te da unas salidas $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\boxed{\bar{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m}; \mathbb{R}^n \equiv \text{conjunto de elementos de dim. } n$$

$$\bar{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R} \forall i$$

Clasificación de funciones:

$m=1$; $n=1$: Función escalar ($m=1$), de variable escalar ($n=1$)

↳ superficie disco: $A = \pi r^2$

$m=1$; $n > 1$: Función escalar ($m=1$); de variable vectorial ($n > 1$)

↳ velocidad: v_x = v_{0x} + at $\rightarrow f(x, y) = z$

$m > 1$; $n > 1$: Función vectorial; de variable vectorial

Dominio de una función:

Dom $\bar{f} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n / \exists \bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m \} \equiv$ podemos "alimentar" una función sin que esta reviente

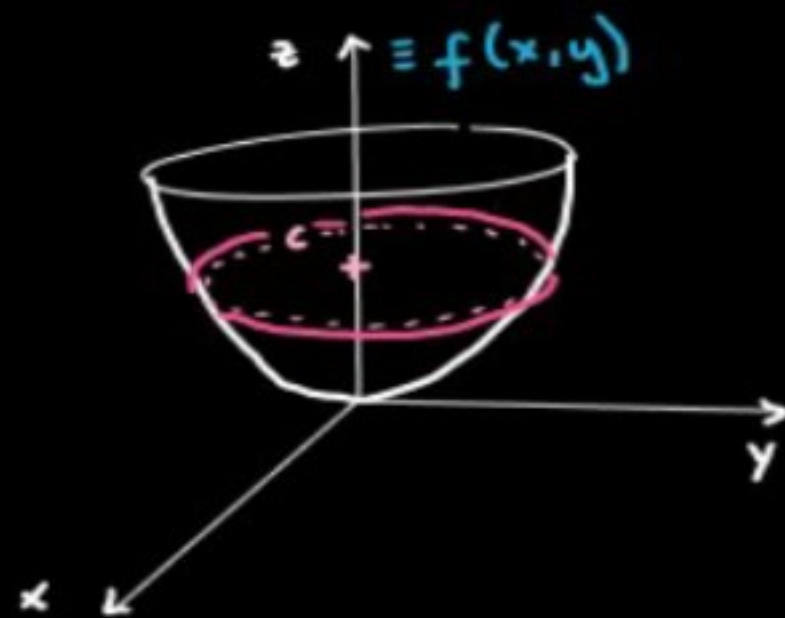
Imagen

$$\text{Im } \bar{f} = \{ \bar{z} \in \mathbb{R}^m / \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ con } \bar{f}(\bar{x}) = \bar{z} \}$$
$$= \{ \bar{f}(\bar{x}) / \bar{x} \in \text{Dom } \bar{f} \}$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) : x \in [-1, 2)$$

- En 1 variable hablar de dominios se traducía en obtener rangos del eje x para los que la función no "petaba"
- En 2 variables hablar de dominios implica hablar de superficies en el plano (x, y) en los que la función no "peta"

Representación de funciones de varias variables ($f(\underline{x}, \underline{y}) = z$)



- Las funciones de tipo $f(x, y) = z$ definen superficies en el espacio (x, y, z)
- A menudo para "visualizar" funciones de varias variables se emplean las llamadas "curvas de nivel"

$$L_c = \{ (x, y) \in D / f(x, y) = c ; \text{ con } c \in \mathbb{R} \}$$

111 Hallar y representar el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

b) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(y^2 - x^2)}$

c) $f(x, y) = \sqrt[3]{16 - x^2 - y^2}$

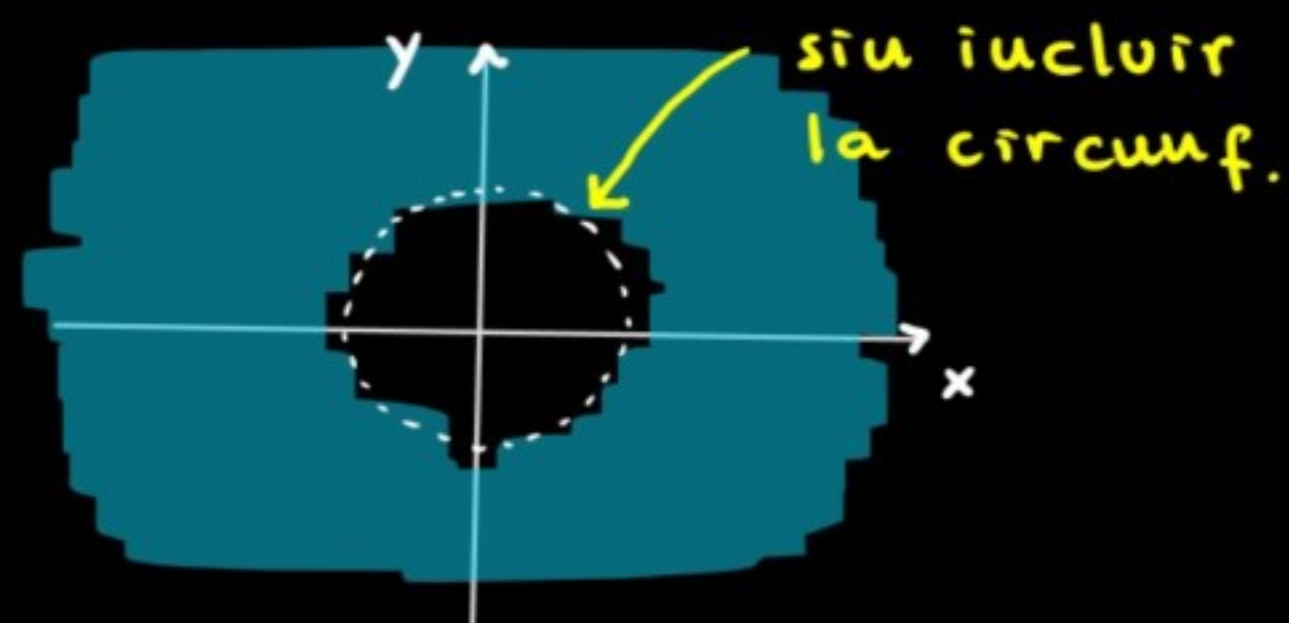
Ⓜ1 Hallar y representar el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

Dom: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 1 > 0$

$\hookrightarrow x^2 + y^2 > 1 \leadsto x^2 + y^2 = 1$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



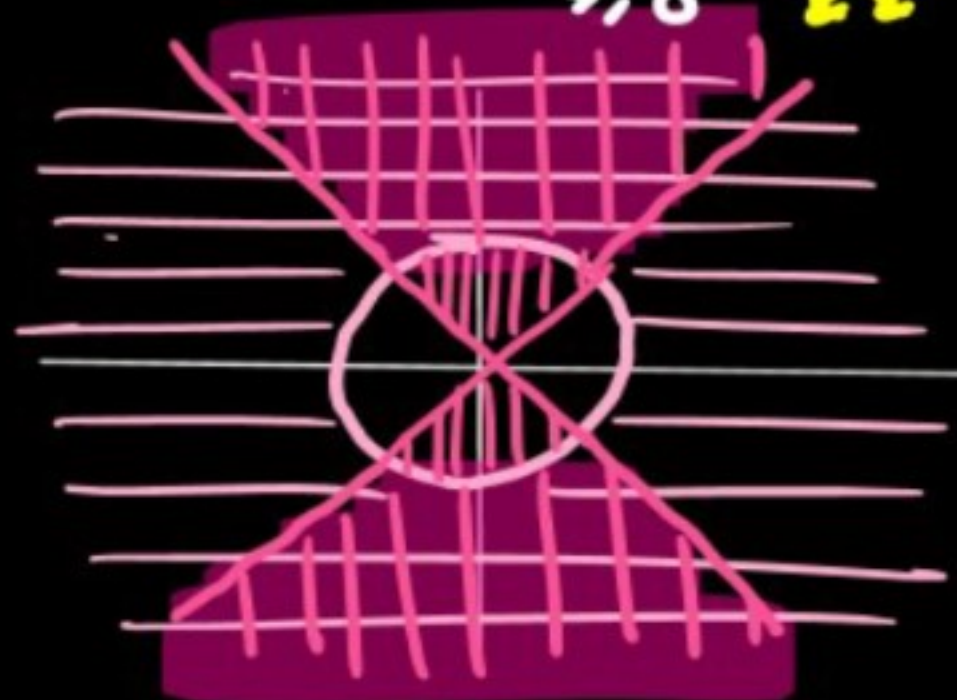
11) Hallar y representar el dominio de las siguientes funciones

b) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(y^2-x^2)}$

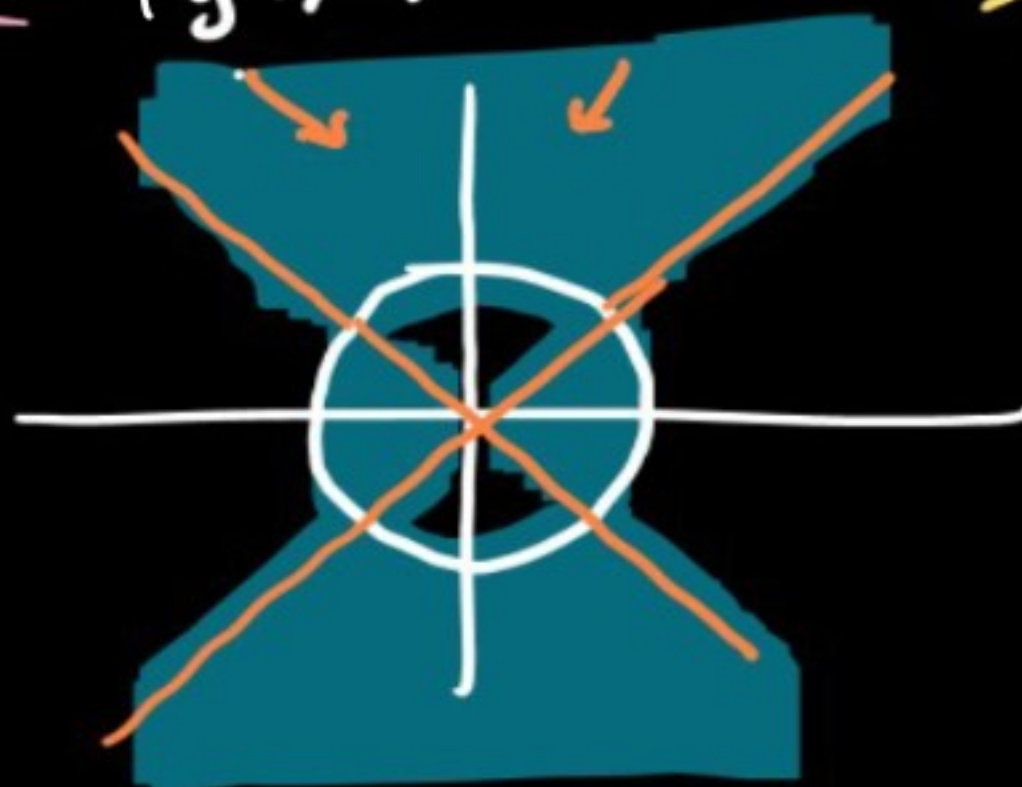
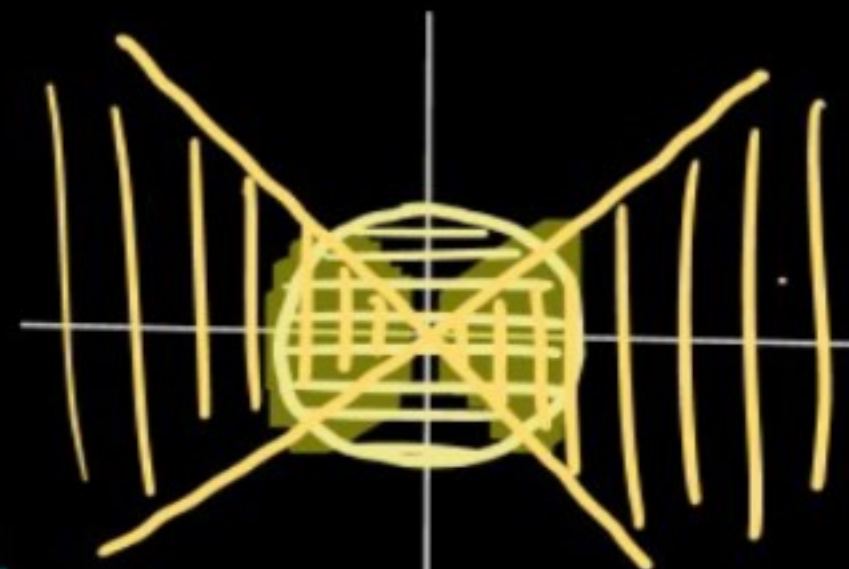
→ Expandido: $y^4 - y^2 \geq x^4 - x^2$ (X)

Dom $f(x,y) = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2+y^2-1) \cdot (y^2-x^2) \geq 0$

caso 1) $\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(y^2-x^2)}_{\geq 0}$ OR caso 2) $\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(y^2-x^2)}_{\leq 0}$



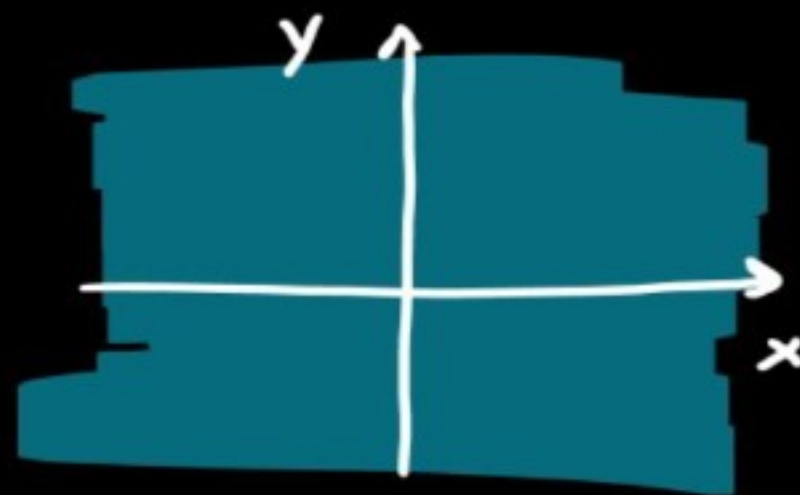
$y^2 - x^2 \geq 0$
 $\sqrt{y^2} \geq \sqrt{x^2}$
 $\begin{cases} y \geq x \\ y \geq -x \end{cases}$



(11) Hallar y representar el dominio de las siguientes funciones

$$c) f(x, y) = \sqrt[3]{16 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Dom } f(x, y) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$



(P1) Dada $f(x,y) = \sqrt{(4-y-x^2)} \cdot \text{Log}(x+y)$ (Inter 2021)

- a) Hallar y representar gráficamente el dominio de la función $f(x,y)$
- b) Hallar y representar la curva de nivel de $f(x,y)$ que pasa por el punto $(1,0)$

Ⓟ Dada $f(x,y) = \sqrt{4-y-x^2} \cdot \text{Log}(x+y)$ (Inter 2021)

a) Hallar y representar gráficamente el dominio de la función $f(x,y)$

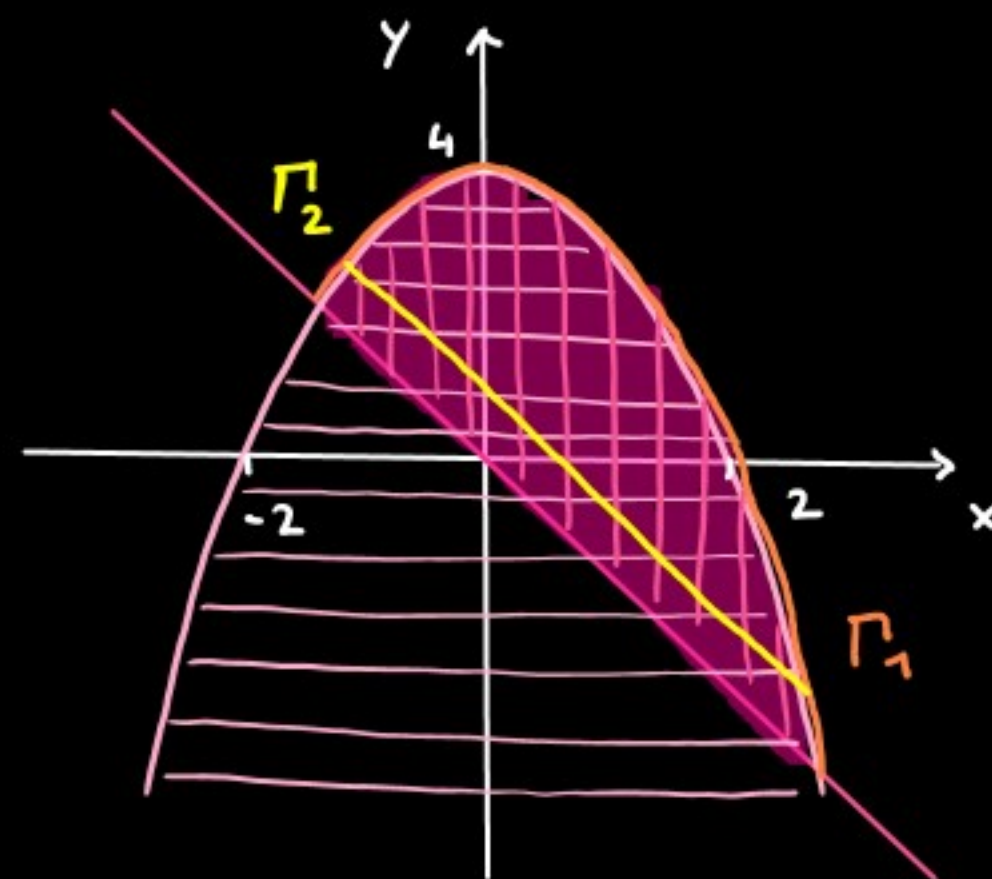
b) Hallar y representar la curva de nivel de $f(x,y)$ que pasa por el punto $(1,0)$

~~~~~

a) Dom:  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (4-y-x^2) > 0 ; (x+y) > 0$

- $4-y-x^2 > 0 \rightarrow y < 4-x^2 \rightsquigarrow y = 4-x^2$

- $x+y > 0 \rightarrow y > (-x) \rightsquigarrow y = -x$



b)  $f(1,0) = \sqrt{4-0-1^2} \cdot \text{Log}(1+0) = 0$

$L_c ; c=0 \rightsquigarrow \sqrt{4-y-x^2} \cdot \text{Log}(x+y) = 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \sqrt{4-y-x^2} &= 0 \rightarrow \begin{cases} y = 4-x^2 \bullet \Gamma_1 \\ y = 1-x \bullet \Gamma_2 \end{cases} \\ \hookrightarrow x+y &= 1 \end{aligned}$$

(siempre que  $(x,y) \in \text{Dom } f(x,y)$ )

## Limites (Repaso)

- Se emplean para saber si una función "revienta" en puntos conflictivos del dominio
- Sirven para resolver indeterminaciones:

a)  $\infty - \infty$       d)  $0 \cdot \infty$   
b)  $\infty / \infty$       e)  $0 / 0$   
c)  $1^\infty$       f)  $0^0$

g)  $\infty^0$

Tipo 1) Depende de los tamaños relativos

$1^\infty$ : Depende de si la base es  $1 = \begin{cases} 0,99999 \dots 9 \\ 1,000000 \dots 1 \end{cases}$

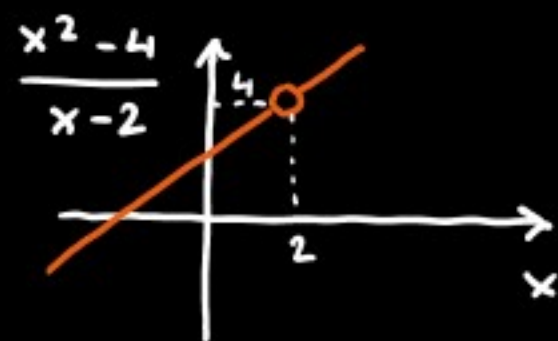
$0^0, \infty^0$ : Depende de si el exp es  $(>0)$  ó  $(<0)$

- Nos damos cuenta de que hay que estudiar un límite cuando al sustituir un punto concreto  $(x_0, y_0)$  en una función  $f(x, y)$ , obtenemos una indetermin.

Cuando esto sucede, el límite estudia qué es lo que sucede cuando nos acercamos mucho (mucho) a ese punto

Ejemplo: 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$  **OK!**

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$



Álgebra de límites: Dadas  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

con  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$

se cumple:

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$

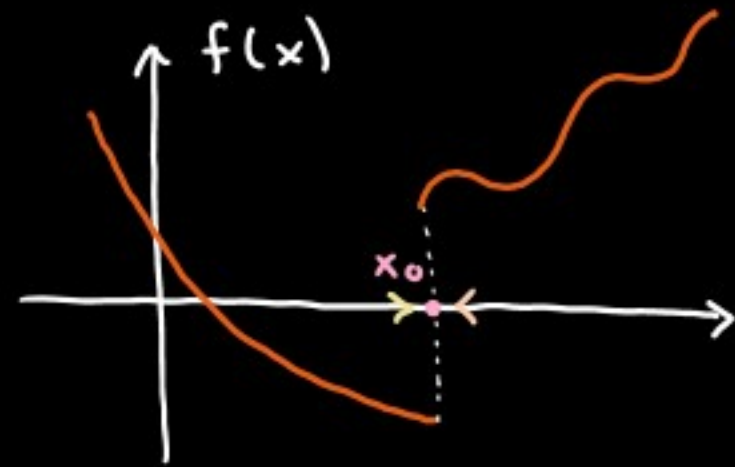
2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = l_1/l_2$  si  $l_2 \neq 0$

4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = l_1^{l_2}$  si  $\boxed{l_1 > 0}$  **why?** 

## Limites (1 vs 2 variables)

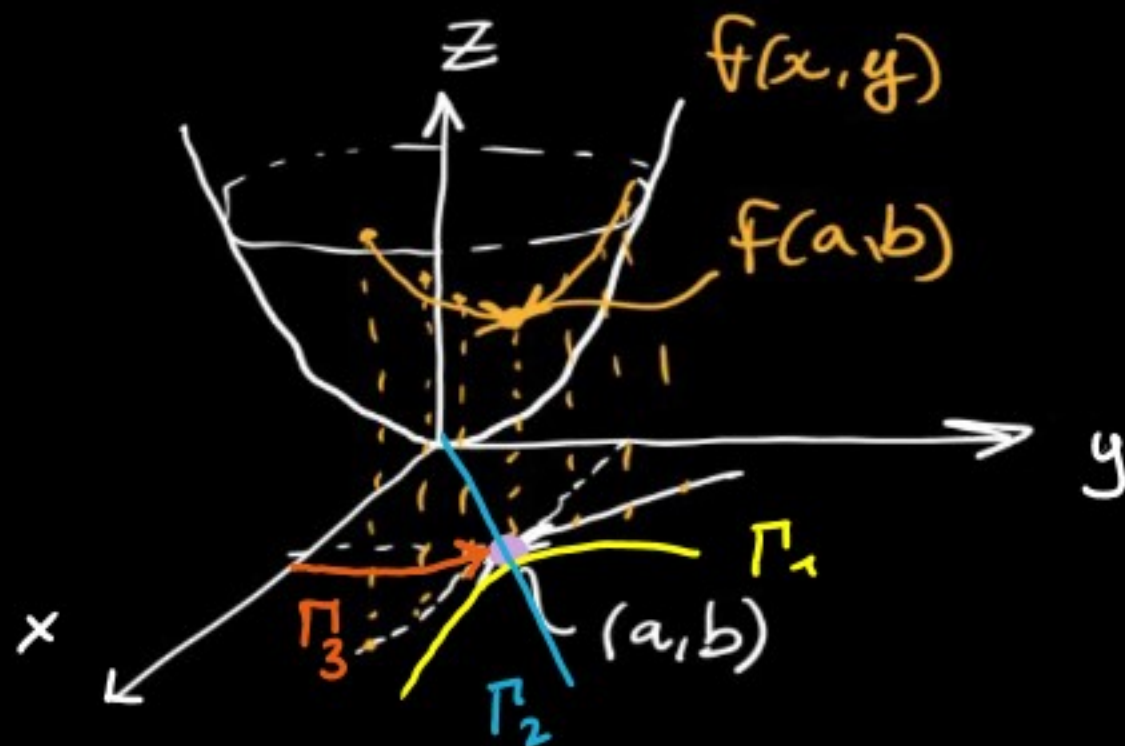
- En el caso de funciones de variable escalar (1 variable) la aproximación al punto conflictivo sólo se podía hacer por el eje  $x$  (por la izq o la der del punto):



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

- Cuando trabajamos con funciones escalares de variable vectorial (2 variables) el tema es más complejo porque hay muchas direcciones según las cuales nos podemos aproximar al punto conflictivo (habitualmente el  $(0,0)$ )

$$f(x,y) = z$$



$\leadsto$  Para decir que un límite existe, necesitamos que el valor del límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$  con independencia del camino escogido (para cualquier camino posible  $\in \text{Dom}$ )

# Métodos para confirmar la NO existencia de límites

## ① Iterados / Sucesivos :

$$\begin{aligned} & \text{AND} \quad \begin{cases} \text{i) } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right] = L_1 \\ \text{ii) } \lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right] = L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$P \rightarrow Q$$

- si  $L_1 = L_2 = L \rightarrow$  candidato
- si  $L_1 \neq L_2 \rightarrow \nexists L$

OJO: puede darse la situación de que un límite reiterado/sucesivo  $\nexists$  y sin embargo que el límite doble si  $\exists$

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow \bar{Q} \rightarrow \bar{P} \neq Q \rightarrow P$$

## ② Direccionales

$$\begin{aligned} & \text{OR} \quad \begin{cases} \text{i) } x = my^n \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} f(my^n, y) = L_1 \\ \text{ii) } y = mx^n \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx^n) = L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

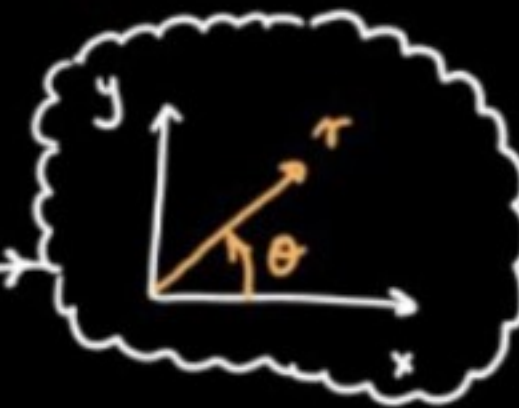
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

- si  $L_1 = L_2 = L$ ; y  $L \neq L(m,n)$ ,  $L \rightarrow$  candidato
- si  $L_1 \neq L_2$  ó  $L_{1,2} = L_{1,2}(m,n) \rightarrow \nexists L$

$\hookrightarrow$  si  $\begin{cases} u=1 \rightarrow$  aproximación por rectas \\  $u=2 \rightarrow$  aproximación por parábolas \end{cases}

## Métodos para confirmar la (sí) existencia de límites

$$\text{① O. acotado} \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + y^4} = 0$$



$$\text{② Polares} \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = L \rightarrow \begin{cases} \text{si } L = L(\theta) \rightarrow \nexists L \\ \text{si } L = L(r) \rightarrow \exists L \end{cases}$$

Posibilidades:

- #1) si  $L = L(\theta) \rightarrow \nexists L$
- #2) si  $L = L(r)$ , con O. acotado:  $\exists L$
- #3) si  $L = L(\theta)$  no acotada, o problemática (si el denominador puede = 0)  $\rightarrow$

$$\text{p.ej. } \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot r$$

Demostrar que  $\nexists L$  con  $\begin{cases} \text{iterados} \\ \text{direcc} \end{cases}$

M2) Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^4}{x^2 + y^2}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 y^4}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

M2) Calcular los siguientes límites:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^4}{x^2+y^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{5x^2}_{0 \cdot \text{Acotado } [0,1]} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\in [0,1]} = \boxed{0 \ (\exists L)}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 y^4} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^6} \cos^3 \theta \sin^3 \theta}{\cancel{r^6} \cos^2 \theta \sin^4 \theta} = \frac{1}{\tan \theta} : \underline{\underline{L = L(\theta) : \nexists}}$

Polares:

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1)}} = \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r}_{0} \cdot \underbrace{\cos \theta \sin \theta}_{\text{Acotado } [-1,1]} = \boxed{L = 0 \ (\exists L)}$

Polares:

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \rightarrow \begin{cases} y = mx^2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{m} x^4}{(m^2 + 1) \cancel{x^4}} = \frac{m}{m^2 + 1}$

Direccionales:

$\hookrightarrow L = \frac{m}{m^2 + 1} = L(m) \rightarrow \underline{\underline{\nexists L}}$

¿Cuándo conviene usar cada método?

¿Cuándo conviene usar cada método? (para estudiar un Límite)



Si hay términos:

c1)  $\frac{x^p \cdot y^q}{x^n + y^m}$ , con  $n$  y  $m$  pares y  $((p=0) \text{ OR } (p \geq n)) \underline{\text{OR}} ((q=0) \text{ OR } (q \geq m))$

↳ Conviene buscar expresiones de tipo 0 · acotado: EJ)  $\frac{x^7 \cdot y}{x^6 + y^2} = xy \cdot \frac{x^6}{x^6 + y^2}$

↳ Aplicar este método primero incluso cuando  $n=m=2 \rightsquigarrow$  ver apt a) (M2)

c2)  $\frac{x^p \cdot y^q}{x^n + y^m}$ , con  $((p=0) \text{ OR } (p \leq n)) \underline{\text{AND}} ((q=0) \text{ OR } (q \leq m)) \rightsquigarrow$  conviene demostrar  $\nexists L$

↳ Conviene usar direccionales de la forma  $\begin{cases} x = \kappa y^{m/n} & \text{si } m > n \\ y = \kappa x^{n/m} & \text{si } n > m \end{cases}$  EJ) ver apt d) (M2)

c3)  $\frac{x^p + y^q}{x^n + y^m}$ ; con  $(p \neq n) \text{ OR } (q \neq m) \rightsquigarrow$  usar sucesivos EJ)  $\frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} L = 1$   
 $\xrightarrow{x=0} L = 0$   $\nexists L$

c4)  $\frac{x^p \cdot y^q}{x^n + y^m}$  con  $(n=m) \text{ AND } (p+q > n)$  } usar polares tanto para demostrar  $\nexists L$   
 ver apt b) c) (M2)

c5)  $\frac{x^p \cdot y^q}{x^n \cdot y^m}$  con  $p+q > n+m$

Recordar:  
 $x^2 + y^2 = r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) = r^2$

## Infinitésimos

- Una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es un infinitésimo en  $(x_0, y_0)$  si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = 0$
- Se dice que dos funciones  $f(x,y), g(x,y)$  son infinitésimos equivalentes en  $(x_0, y_0)$  si se cumple que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = 1$
- Casos relevantes de infinitésimos equivalentes  $\left( \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = 0 \right)$

a)  $\operatorname{sen} f(x,y) \sim f(x,y) - \frac{(f(x,y))^3}{3!} + \frac{(f(x,y))^5}{5!} - \dots$     b)  $\operatorname{arcseu} f(x,y) \sim f(x,y) + \frac{(f(x,y))^3}{3!} + \frac{(f(x,y))^5}{5!} + \dots$

c)  $\cos f(x,y) \sim 1 - \frac{(f(x,y))^2}{2!} + \frac{(f(x,y))^4}{4!} - \dots$     d)  $\operatorname{arccos} f(x,y) \sim \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcseu} f(x,y)$

e)  $\operatorname{tg} f(x,y) \sim f(x,y) + \frac{(f(x,y))^3}{3} + \frac{2(f(x,y))^5}{15} + \dots$     f)  $\operatorname{arctg} f(x,y) \sim f(x,y) + \frac{(f(x,y))^3}{3} + \frac{(f(x,y))^5}{5} + \dots$

g)  $a^{f(x,y)} \sim 1 + f(x,y) \cdot \operatorname{Ln} a + \frac{(f(x,y) \cdot \operatorname{Ln} a)^2}{2!} + \dots$     h)  $e^{f(x,y)} \sim 1 + f(x,y) + \frac{(f(x,y))^2}{2!} + \dots$

$\rightarrow a^{f(x,y)} = (e^{\operatorname{Ln} a})^{f(x,y)} = e^{f(x,y) \cdot \operatorname{Ln} a}$

Propiedad: si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = 1$

i)  $\operatorname{Log}(1 + f(x,y)) \sim f(x,y) - \frac{(f(x,y))^2}{2} + \frac{(f(x,y))^3}{3} - \dots \rightsquigarrow \operatorname{Log}(f(x,y)) \approx f(x,y) - 1$

P2) Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)}{x^2 + y^2}$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(3 - 3 \cos(xy))}{x^4 + y^2}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy) \cdot \cos(2x^2) \cdot \operatorname{Ln}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + xy^3\right)}{x^2 + y^4}$$

P2) Calcular los siguientes límites:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)}{x^2 + y^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \rightarrow \text{Infinitésimos} \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \rightarrow \begin{cases} \text{Polares} \\ x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$

Infinitésimos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}(x) \sim x$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{sen}(y) \sim y$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cancel{r^2} \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{\cancel{r^2} (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)} = \cos \theta \operatorname{sen} \theta \rightarrow L = L(\theta) : \boxed{\nexists L}$$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(3 - 3 \cos(xy))}{x^4 + y^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \rightarrow \text{Inf} \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\cancel{3} - \cancel{3} + \frac{3}{2} (xy)^2)}{x^4 + y^2} =$

Infinitésimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(xy) \sim 1 - \frac{(xy)^2}{2!}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{3}{2} x^2}_0 \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^4 + y^2}}_{\text{acotado } [0,1]} = 0 \rightarrow \boxed{L=0}$$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy) \cdot \cos(2x^2) \cdot \operatorname{Ln}(\cancel{\operatorname{sen}} \frac{\pi}{2} + xy^3)}{x^2 + y^4} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \rightarrow \text{Inf} \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cdot xy^3}{x^2 + y^4} =$

Infinitésimos:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

$$\operatorname{tg}(xy) \sim xy$$

$$\cos(2x^2) \sim 1$$

$$\operatorname{Ln}(1 + xy^3) \sim xy^3$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{x^2}_0 \cdot \underbrace{\frac{y^4}{x^2 + y^4}}_{\text{acotado } [0,1]} = 0 \rightarrow \boxed{L=0}$$

## Continuidad

Para que una función  $f(x,y)$  sea continua en un punto  $(x_0, y_0)$  se tiene

que cumplir que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) \{ \text{con } (x,y) \neq (x_0, y_0) \} = f(x_0, y_0)$$

⚠ Importante  
indicar esto

Ⓔ Estudiar la continuidad de la función  $f(x,y)$  en  $(0,0)$  según los distintos valores del parámetro  $n \in \mathbb{N}$  (Inter 2021)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^y - 1) \cdot \sin(x^{n+2})}{x^4 + \arctan^6(y)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

# ¿Cuándo conviene usar cada método? (Para la continuidad)



Algunas cosas a tener en cuenta:

**Idea:** Todo esto de los límites lo vamos a estar usando para estudiar la continuidad de una función (en función de uno o varios parámetros), en un punto conflictivo

**Est 1** • Típicamente nos va a interesar demostrar que la función es continua

(**Paso** #1) para algunos valores:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \leadsto$  para lo cual queremos demostrar la sí existencia del límite  $\nearrow$  0. acotado  
 $\searrow$  polares

$\hookrightarrow$  En general, si el límite existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ , este será igual al valor de la función en el punto conflictivo

**Est 2** • Fuera de los puntos en los que el límite existe (y donde la función

(**Paso** #2) es continua), nos conviene demostrar que el límite no existe  $\nearrow$  sucesivos  
 $\searrow$  direccionales

(E1) Estudiar la continuidad de la función  $f(x,y)$  en  $(0,0)$  según los distintos valores del parámetro  $n \in \mathbb{N}$  (Ínter 2021)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^y - 1) \cdot \sin(x^{n+2})}{x^4 + \arctg^6(y)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol: Para que la función sea continua  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(e^y - 1) \cdot \sin(x^{n+2})}{x^4 + \arctg^6(y)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \rightarrow \text{Inf} \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \cdot x^{n+2}}{x^4 + y^6} :$$

Infinitésimos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} :$

- $e^y - 1 \sim y$
- $\sin(x^{n+2}) \sim x^{n+2}$
- $\arctg^6(y) \sim y^6$

Para  $n \geq 2$  :  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \cdot x^{n+2}}{x^4 + y^6} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{y \cdot x^{n-2}}_0 \cdot \underbrace{\frac{x^4}{x^4 + y^6}}_{\text{acotado } [0,1]} = 0$

Para  $n=1$   $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \cdot x^3}{x^4 + y^6} \rightarrow \text{Aprox } y = mx \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^4}{x^4 + m^6 x^6} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^4} m}{\cancel{x^4} (1 + m^6 x^2)} = m \rightarrow L = L(m) \rightarrow \nexists L \leadsto$$

La función sólo es continua para  $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$